Método de Elementos Finitos y algunas aplicaciones

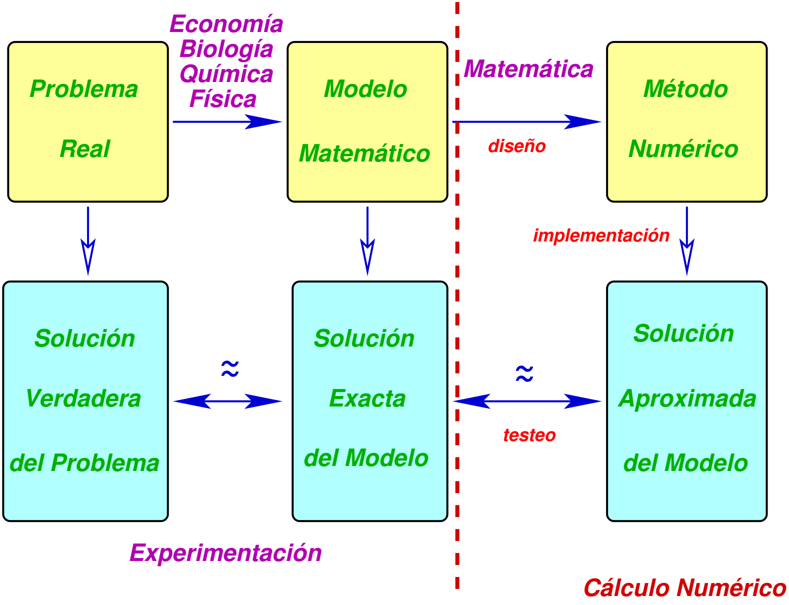
Jessika Camaño

Departamento de Matemática y Física Aplicadas,
UCSC, Chile
Centro CI^{2}MA, UdeC, Chile

Escuela Emalca Virtual Chile:
“Matemáticas y sus Aplicaciones”
10-21 enero 2022

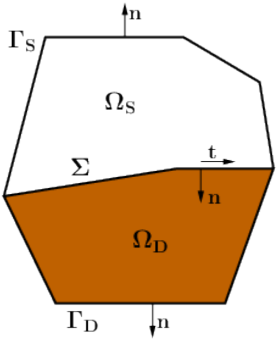
Contenidos

Motivación


Economía
Biología
Química
Física
Problema Real
Modelo Matemático
Matemática
diseño
Método Numérico
implementación
Solución Verdadera del Problema
≈
Solución Exacta del Modelo
≈
testeo
Solución Aproximada del Modelo
Experimentación
Cálculo Numérico

Ejemplo: Problema de filtración

Geometría del problema



Fluido viscoso incompresible en Ω_S (fluyendo de un lado a otro a través de Σ)	**Medio poroso** en Ω_D (saturado con el mismo fluido)

Problema acoplado: Encontrar velocidades $(\mathbf{u}_\mathrm{S}, \mathbf{u}_\mathrm{D})$ y presiones $(p_\mathrm{S}, p_\mathrm{D})$

$$\mathrm{N-S}\left\{\begin{array}{rcll} -2\nu\,\mathbf{dive}(\mathbf{u}_\mathrm{S}) + (\mathbf{u}_\mathrm{S}\cdot\nabla)\cdot\mathbf{u}_\mathrm{S} + \nabla p_\mathrm{S} & = & \mathbf{f}_\mathrm{S} & \text{en } \Omega_\mathrm{S} \\ \mathrm{div}\,\mathbf{u}_\mathrm{S} & = & 0 & \text{en } \Omega_\mathrm{S} \\ \mathbf{u}_\mathrm{S} & = & \mathbf{0} & \text{en } \Gamma_\mathrm{S} \end{array}\right.$$

$$\mathrm{Darcy}\left\{\begin{array}{rcll} \mathbf{u}_\mathrm{D} & = & -\mathbf{K}\,\nabla p_\mathrm{D} & \text{en } \Omega_\mathrm{D} \\ \mathrm{div}\,\mathbf{u}_\mathrm{D} & = & 0 & \text{en } \Omega_\mathrm{D} \\ \mathbf{u}_\mathrm{D}\cdot\mathbf{n} & = & 0 & \text{en } \Gamma_\mathrm{D} \end{array}\right.$$

$$\mathrm{Interface}\left\{\begin{array}{rcll} \mathbf{u}_\mathrm{S}\cdot\mathbf{n} & = & \mathbf{u}_\mathrm{D}\cdot\mathbf{n} & \text{en } \Sigma \\ (\boldsymbol{\sigma}_\mathrm{S}\,\mathbf{n})\cdot\mathbf{n} & = & -\,p_\mathrm{D} & \text{en } \Sigma \\ (\boldsymbol{\sigma}_\mathrm{S}\,\mathbf{n})\cdot\mathbf{t} & = & -\dfrac{\nu}{\kappa}(\mathbf{u}_\mathrm{S}\cdot\mathbf{t}) & \text{en } \Sigma \end{array}\right.$$

con $\boldsymbol{\sigma}_\mathrm{S} = 2\nu\,\mathbf{e}(\mathbf{u}_\mathrm{S}) - p_\mathrm{S}\mathrm{I}$ en Ω_S.

Idea General

Idea General

La idea es reescribir el modelo en un problema de la forma: Dado un "funcional" $F : H \to \mathbb{R}$, hallar $u \in H$ (H de dimensión infinita), tal que

$$a(u, v) = F(v) \qquad \forall\, v \in H,$$

donde $a : H \times H \to \mathbb{R}$ es una "forma bilineal".

Como H es de dimensión infinita, no sé cómo calcular la solución.

Idea de Galerkin (Boris Galerkin, 1871-1945)

Definimos $H_n \subseteq H$ ($n = dim(H_n)$), y el problema: Hallar $u_n \in H_n$, tal que

$$a(u_n, v_n) = F(v_n) \qquad \forall\, v_n \in H_n\,.$$

$$H_n = \langle \{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \rangle\,, \quad u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \phi_i \quad (\alpha_i \in \mathbb{R}, \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\})\,.$$

Entonces

$$a(u_n, v_n) = F(v_n), \quad \forall\, v_n \in H_n$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, a(\phi_i, \phi_j) = F(\phi_j), \quad \forall\, j \in \{1, ..., n\}\,.$$

Notemos que $a(\phi_i, \phi_j) \in \mathbb{R}$ y $F(\phi_j) \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a(\phi_i, \phi_j) = F(\phi_j), \quad \forall\, j \in \{1, ..., n\}.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 a(\phi_1, \phi_1) + \alpha_2 a(\phi_2, \phi_1) \ldots \alpha_n(\phi_n, \phi_1) = F(\phi_1) \\ \alpha_1 a(\phi_1, \phi_2) + \alpha_2 a(\phi_2, \phi_2) \ldots \alpha_n(\phi_n, \phi_2) = F(\phi_2) \\ \vdots \\ \alpha_1 a(\phi_1, \phi_n) + \alpha_2 a(\phi_2, \phi_n) \ldots \alpha_n(\phi_n, \phi_n) = F(\phi_n) \end{array} \right.$$

$$\Updownarrow$$

$$A\,\vec{\alpha} = \vec{f}$$

con $A = (a(\phi_i, \phi_j))_{i,j}$, $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^t$ y $\vec{f} = (F(\phi_1), \ldots, F(\phi_n))^t$.

Un problema unidimensional

Un ejemplo simple

Hallar u tal que:

$$-u''(x) = \sin(\pi x), \quad \forall\, x \in (0,1)\,,$$

$$u(0) = u(1) = 0\,.$$

Sol: $u(x) = \dfrac{1}{\pi^2}\sin(\pi x)$.

Un ejemplo un poco más complejo

Hallar u tal que:

$$-u''(x) = -e^x x(4x^3 - 4x + 1) \quad \forall\, x \in (0,1)\,,$$

$$u(0) = u(1) = 0\,.$$

Sol: ????.

Formulación variacional (primer paso)

Hallar $u \in H$ tal que:

$$\int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx = -\int_0^1 e^x x(4x^3 - 4x + 1)\, v(x)\, dx \quad \forall\, v \in H,$$

o equivalentemente: Hallar $u \in H$ tal que:

$$a(u, v) \;=\; F(v) \quad \forall\, v \in H,$$

donde

$$a(u, v) \;=\; \int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx \quad \text{y} \quad F(v) \;=\; -\int_0^1 e^x x(4x^3 - 4x + 1)\, v(x)\, dx\,.$$

H es un espacio de funciones con dominio $\Omega = (0, 1)$ que se anulan en $x = 0$ y $x = 1$ (H es de dimensión infinita).

Notación: $H = H_0^1(\Omega)$.

Existe solución?

Espacio y norma asociada

$$H_0^1(\Omega) := \overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,\Omega}},$$

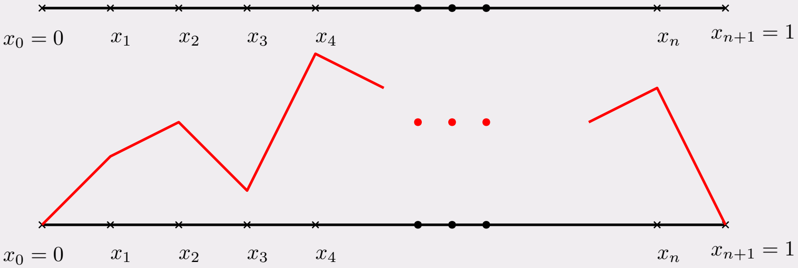
$$\|u\|_{1,\Omega} := \left\{\|u'\|_{0,\Omega}^2 + \|u\|_{0,\Omega}^2\right\}^{1/2}, \quad \|u\|_{0,\Omega}^2 := \int_0^1 |u(x)|^2\,dx\,.$$

Método de Elementos Finitos (segundo paso)

Espacio de elementos finitos $H_h \subseteq H$

$$H_h := \left\{ \begin{array}{ll} v_h \in C([0,1]) : & v_h|_{[x_{j-1},x_j]} \in \mathbb{P}_1([x_{j-1},x_j]) \\ \forall\, j \in \{1\ldots,n+1\}, & v_h(0) = v_h(1) = 0. \end{array} \right\},$$

donde $x_0, \ldots x_{n+1}$ son los puntos de una discretizacion uniforme de $\Omega = (0,1)$, con $h = x_j - x_{j-1}$, $\forall\, j \in \{1\ldots,n+1\}$,



Problema discreto: Hallar $u_h \in H_h$ tal que:

$$\int_0^1 u_h'(x)\, v_h'(x)\, dx \;=\; -\int_0^1 e^x x(4x^3 - 4x + 1)\, v_h(x)\, dx\,,$$

para todo $v_h \in H_h$.

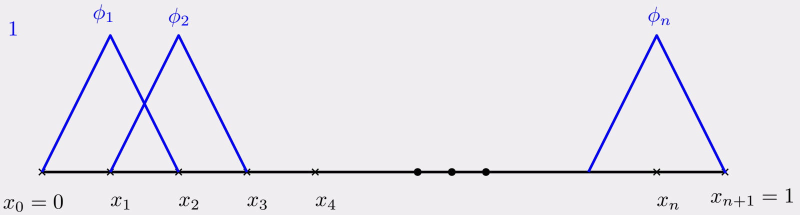
Q1: Existe solución?

Q2: Cómo calcular u_h?

Q3: $\|u - u_h\|_{1,\Omega}$

H_h es de dimension finita $(dim(H_h) = n)$. Por lo tanto existe una base $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ tal que

$$H_h = \langle \{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \rangle .$$



donde

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}}{h_j}, & \text{si } x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \dfrac{x_{j+1} - x}{h_{j+1}}, & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}] \end{cases}$$

con $h_j := x_j - x_{j-1}$.

Sistema Lineal (tercer paso)

Funciones base

$$H_h := \langle \{\phi_1, ..., \phi_n\} \rangle$$

Combinación lineal

$$u_h := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \phi_j$$

Sistema Lineal:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_0^1 \phi_j' \phi_i' = \int_\Omega f \phi_i, \qquad \forall\, i \in \{1, ..., n\}$$

$$\begin{pmatrix} \int_0^1 \phi_1'\phi_1' & \dots & \int_0^1 \phi_1'\phi_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 \phi_n'\phi_1' & \dots & \int_0^1 \phi_n'\phi_n' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 f\phi_1 \\ \vdots \\ \int_0^1 f\phi_n \end{pmatrix}$$

En este caso, la matriz de rigidez es:

$$A = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Un problema bidimensional

Problema modelo

$$\begin{aligned} -\Delta u + c\,u = f \quad & \text{en } \Omega, \\ u = 0 \quad & \text{en } \partial\Omega\,. \end{aligned}$$

- $\Omega \subseteq \mathrm{R}^2$: dominio poligonal.
- $\partial\Omega$: frontera de Ω.
- c: constante positiva.
- $f \in L^2(\Omega)$

Formulación variacional (primer paso)

Hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + c \int_\Omega uv = \int_\Omega fv \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Tiene solución?

Método de Elementos Finitos (segundo paso)

Espacio de Elementos Finitos:

$$H_h := \left\{ v_h \in C(\bar{\Omega}) : \quad v|_T \in \mathbb{P}_1(T) \quad \forall\, T \in \mathcal{T}_h \right\}$$

$$H_{h,0} := H_h \cap H_0^1(\Omega)$$

Problema discreto: Hallar $u_h \in H_{h,0}$ tal que

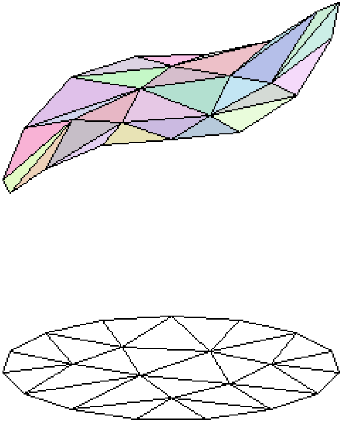
$$\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v_h + c \int_\Omega u_h v_h = \int_\Omega f v_h \qquad \forall\, v_h \in H_{h,0}\,.$$

Q1: Tiene solución?

Q2: Como calcular u_h?

Q3: $\|u - u_h\|_{1,\Omega}$?

Funciones Continuas a Trozos



Sistema lineal (tercer paso)

Funciones bases:

$$H_{h,0} := \langle \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \rangle$$

Combinación lineal:

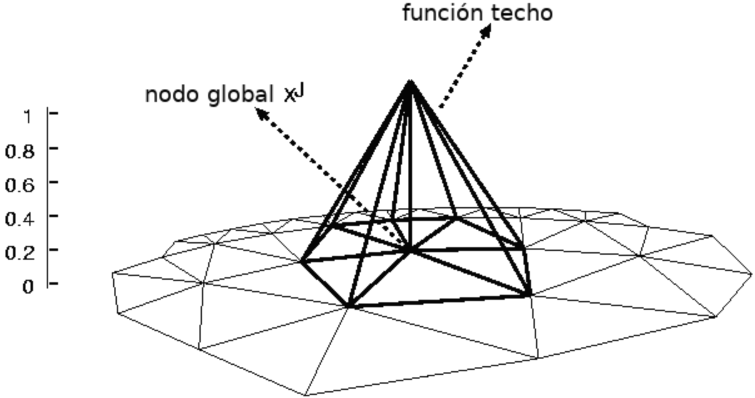
$$u_h := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, \varphi_j$$

Sistema lineal:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\int_\Omega \nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_i + c \int_\Omega \varphi_j \, \varphi_i \right) = \int_\Omega f \, \varphi_i, \qquad \forall \, i \in \{1, ..., n\}$$

$$\begin{pmatrix} \int_\Omega \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_1 + c \int_\Omega \varphi_1\varphi_1 & \cdots & \int_\Omega \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_n + c \int_\Omega \varphi_1\varphi_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_\Omega \nabla\varphi_n \cdot \nabla\varphi_1 + c \int_\Omega \varphi_n\varphi_1 & \cdots & \int_\Omega \nabla\varphi_n \cdot \nabla\varphi_n + +c \int_\Omega \varphi_n\varphi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_\Omega f\varphi_1 \\ \vdots \\ \int_\Omega f\varphi_n \end{pmatrix}$$

Funciones bases



Existencia y unicidad de solución

Teorema de Lax-Milgram

Sea H un espacio de Hilbert y $a(\cdot,\cdot)$ una forma bilineal, acotada (con constante $M > 0$) y H-elíptica (con $\alpha > 0$), es decir:

1. $|a(u,v)| \leq M||u||_H||v||_H, \quad \forall\, u,v \in H$
2. $a(v,v) \geq \alpha||v||_H^2, \quad \forall\, v \in H.$

Entonces, para todo $F \in H'$, existe un único $u \in H$ tal que:

$$a(u,v) = F(v) \quad \forall\, v \in H\,.$$

Además,

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha}\|F\|_{H'}.$$

Recordamos el problema modelo ...

$$
\begin{aligned}
-\Delta u + cu = f \quad & \text{en } \Omega, \\
u = 0 \quad & \text{en } \partial\Omega\,.
\end{aligned}
$$

- $\Omega \subseteq \mathrm{R}^2$: dominio poligonal.
- $\partial\Omega$: frontera de Ω.
- c: constante positiva.
- $f \in L^2(\Omega)$

Formulación variacional

Hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$
\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + c \int_\Omega u\, v = \int_\Omega f\, v \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)\,.
$$

Tiene solución?

Problema variacional

Hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(u,v) \,=\, F(v) \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)\,.$$

$a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathrm{R}$,

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + c \int_\Omega u\, v$$

$F : H_0^1(\Omega) \to \mathrm{R}$,

$$F(v) := \int_\Omega f\, v\,.$$

Notar que:

- F es lineal y acotado:

$$|F(v)| = \left|\int_\Omega f\,v\right| \le \|f\|_{0,\Omega}\|v\|_{0,\Omega} \le \|f\|_{0,\Omega}\|v\|_{1,\Omega} \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)\,.$$

- a es una forma bilineal (evidente!)
- a es acotada:

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &= \left|\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v + c\int_\Omega u\,v\right| \le \left|\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\right| + \left|c\int_\Omega u\,v\right| \\ &\le \max\{1,c\}\Big(\|\nabla u\|_{0,\Omega}\|\nabla v\|_{0,\Omega} + \|u\|_{0,\Omega}\|v\|_{0,\Omega}\Big) \\ &\le \max\{1,c\}\Big(\|\nabla u\|_{0,\Omega}^2 + \|u\|_{0,\Omega}^2\Big)^{1/2}\Big(\|\nabla v\|_{0,\Omega}^2 + \|v\|_{0,\Omega}^2\Big)^{1/2} \\ &= M\,\|u\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega}, \end{aligned}$$

con $M = \max\{1,c\}$.

- a es $H_0^1(\Omega)-$elíptica:

$$a(v,v) = \int_\Omega |\nabla v|^2 + c\int_\Omega |v|^2 \geq \alpha \|v\|_{1,\Omega}^2 \quad \text{con } \alpha = \min\{1, c\}.$$

Luego, el Teorema de Lax-Milgram asegura existencia y unicidad de solución del problema variacional.

Notar que si $c = 0$, entonces probar que a es $H_0^1(\Omega)-$elíptica no es tan evidente:

$$a(v,v) \;=\; \int_\Omega |\nabla v|^2 \;=\; |v|_{1,\Omega}^2 \;\geq\; \alpha \, \|v\|_{1,\Omega}^2??$$

Desigualdad de Friederich-Poincaré

Sea Ω un abierto de R^n, acotado en alguna dirección coordenada $(\exists\, i \in \{1, \cdots, n\}, \exists\, c > 0 : |x_i| \leq c, \forall\, \overline{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \Omega)$. Entonces, existe $\alpha > 0$ tal que:

$$|v|_{1,\Omega}^2 \;\geq\; \alpha \, ||v||_{1,\Omega}^2 \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)\,,$$

α depende sólo de la medida del dominio.

Idea de Galerkin (Boris Galerkin, 1871-1945)

Definimos $H_n \subseteq H$ ($n = dim(H_n)$), y el problema: Hallar $u_n \in H_n$, tal que

$$a(u_n, v_n) \;=\; F(v_n) \quad \forall\, v_n \in H_n\,.$$

$$H_n = \langle \{\phi_1, \dots, \phi_n\} \rangle\,, \quad u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i \quad (\alpha_i \in \mathbb{R}, \quad \forall\, i \in \{1, \dots, n\}).$$

Entonces

$$a(u_n, v_n) = F(v_n), \quad \forall\, v_n \in H_n$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, a(\phi_i, \phi_j) = F(\phi_j), \quad \forall\, j \in \{1, ..., n\}.$$

Existencia y unicidad de $\mathbf{u_n}$

Notemos que $F\Big|_{H_n} \in H_n'$ y $a(\cdot,\cdot) : H_n \times H_n \to \mathrm{R}$ es una forma bilineal acotada. Entonces, tenemos la misma estructura que en el caso continuo en H, y por lo tanto podemos aplicar el TLM para asegurar existencia y unicidad.

Teorema de Lax-Milgram Discreto

Supongamos que existe $\alpha_n > 0$ tal que $a(v_n, v_n) \geq \alpha_n \|v_n\|_H^2, \forall\, v_n \in H_n$. Entonces existe una única $u_n \in H_n$ tal que

$$a(u_n, v_n) \;=\; F(v_n) \quad \forall\, v_n \in H_n\,.$$

Además:

$$\begin{aligned}\|u_n\|_H \;&\leq\; \frac{1}{\alpha_n}\left\|F\Big|_{H_n}\right\|_{H_n'} \;=\; \frac{1}{\alpha_n}\sup_{\substack{v_n\in H_n\\ v_n\neq\theta}}\frac{|F(v_n)|}{\|v_n\|_H}\\ &\leq\; \frac{1}{\alpha_n}\|F\|_{H'}\end{aligned}$$

Dem: Directo del TLM continuo.

Si a es H-elíptica, entonces a es H_n-elíptica

Convergencia

Estimación del error de Galerkin

Supongamos que $a(\cdot,\cdot)$ una forma bilineal acotada (con constante $M > 0$) y H-elíptica (con $\alpha > 0$). Se sigue que para todo $F \in H'$ existe un único $u \in H$ tal que:

$$a(u, v) \;=\; F(v) \quad \forall\, v \in H\,,$$

y que para todo $F \in H'$, existe un único $u_n \in H_n$ tal que:

$$a(u_n, v_n) \;=\; F(v_n) \quad \forall\, v_n \in H_n\,.$$

Interesa estimar $\|u - u_n\|_H$.

Condición de ortogonalidad

Notar primero que $a(u - u_n, v_n) = 0$ para todo $v_n \in H_n$.

Sea $v_n \in H_n$ arbitrario. Entonces,

$$\begin{aligned}\alpha\|u-u_n\|_H^2 &\leq a(u-u_n, u-u_n) = a(u-u_n, u-v_n+v_n-u_n)\\ &= a(u-u_n, u-v_n) + a(u-u_n, v_n-u_n)\\ &= a(u-u_n, u-v_n)\\ &\leq M\|u-u_n\|_H\|u-v_n\|_H\,.\end{aligned}$$

Luego,

$$\|u-u_n\|_H \leq \frac{M}{\alpha}\|u-v_n\|_H \quad \forall\, v_n \in H_n$$

de donde

$$\|u-u_n\|_H \leq \frac{M}{\alpha}\inf_{v_n\in H_n}\|u-v_n\|_H\,.$$

Esta estimación se conoce como **“Estimación de Cea”**.

Utilidad de la estimación de Cea

Si somos capaces de construir una familia de operadores de "interpolación" $\Pi_n : H \to H_n$, los cuales satisfacen

$$||v - \Pi_n(v)|| \leq e(n)||v||_H \quad \forall\, v \in H\,,$$

con $e(n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, entonces de la estimación de Cea se tiene:

$$||u - u_n||_H \leq \frac{M}{\alpha}||u - v_n||_H \quad \forall\, v_n \in H_n\,.$$

En particular, para $v_n = \Pi_n(u)$ se tiene:

$$||u - u_n||_H \leq \frac{M}{\alpha}||u - \Pi_n(u)||_H \leq \frac{M}{\alpha}e(n)||u||_H \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

Por lo tanto, el error tiende a cero si la dimensión del espacio tiende a infinito.

Algunos fenómenos estudiados usando Análisis Numérico...

Corte de un 'océano'

Reconstrucción de la velocidad y las recirculaciones del fluido en cada capa.

Mezclas

Estudio de la mezcla de dos componentes que tienden a separarse hasta llegar a un estado de equilibrio.

Gota

Veremos un cuarto de gota la cual va cayendo y tiende a "aplastarse" y se extiende sobre el dominio formando una "ola".

Célula

Tránsito de una célula que se encuentra dentro de un fluido que contiene un cierto flujo de entrada por la frontera izquierda. Vemos cómo se comporta la célula cuando pasa por una región "estrecha".

EEG

La Electroencefalografía (EEG) es una técnica no invasiva usada para localizar actividad eléctrica en el cerebro a partir de mediciones de señales electromagnéticas externas. EEG mide el potencial eléctrico del cuero cabelludo.

Problema de Interés: Conociendo los valores del campo eléctrico sobre la superficie de la cabeza, el objetivo es determinar la **corriente fuente** que produjo esos valores. Esta información es de ayuda cuando se quieren tratar problemas como la epilepsia, por ejemplo.

Modelo

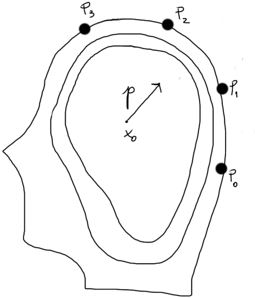
Es posible modelar nuestro problema mediante las siguientes ecuaciones (que denotaremos (P)):

$$\begin{cases} \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}\nabla u) = \mathrm{div}(\mathbf{p}\,\delta_{\mathbf{x}_0}) & \text{en}\,\Omega, \\ \boldsymbol{\sigma}\nabla u\cdot\mathbf{n} = 0 & \text{sobre}\,\partial\Omega\,, \end{cases}$$

- Ω: dominio (cabeza),
- u: potencial escalar,
- $\mathbf{x}_0$: punto de Ω (localización),
- $\delta_{\mathbf{x}_0}$: **delta de Dirac**,
- $\mathbf{p}$: dirección en la que sale el impulso eléctrico (polarización).

Visualización bidimensional del problema

Si P_0, P_1, P_2 y P_3 son los puntos donde fueron puestos los electrodos y P_0 el punto de referencia, lo que se mide mediante un EEG en P_1, P_2 y P_3 es $u(P_1) - u(P_0)$, $u(P_2) - u(P_0)$ y $u(P_3) - u(P_0)$, respect. (dif. de potencial eléctrico)



Problema

Conociendo $\boldsymbol{\sigma}$ *y el valor de* u *en algunos puntos de la frontera del dominio, se necesita encontrar* $\mathbf{x}_0$ *y* $\mathbf{p}$ *utilizando el modelo (P).*

Muchas gracias por su atención!!!